

**APPROXIMATION PAR RÉSEAUX À FONCTIONS RADIALES DE BASE
– APPLICATION À LA DÉTERMINATION DU PRIX D'ACHAT D'UNE
OPTION.**

A. Lendasse¹, J. Lee², E. de Bodt³, V. Wertz¹, M. Verleysen²

¹Université catholique de Louvain, CESAME, 4 av. G. Lemaître
B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium, {lendasse, wertz}@auto.ucl.ac.be.

²Université catholique de Louvain, Département d'Electricité, 3 pl. du Levant,
B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium, {lee, verleysen}@dice.ucl.ac.be.

³Université catholique de Louvain, IAG, 1 pl. des Doyens,
B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium, debodt@fin.ucl.ac.be.

Résumé. Nous proposons une méthode d'approximation de fonction par réseaux à fonctions radiales de base. Nous montrerons que cette méthode d'approximation peut être améliorée par un prétraitement des entrées basé sur un modèle linéaire. Cette méthode d'approximation sera appliquée à la détermination du prix d'achat d'une option.

Abstract: APPROXIMATION USING RADIAL BASIS FUNCTION NETWORKS: APPLICATION TO PRICING DERIVATIVE SECURITIES.

The general scheme of approximation supposes the existence of a relationship between several variables (the inputs) and a dependent variable (the output). This relationship is unknown; we try to build an approximator between the inputs and the output. In that purpose, we need a set of inputs-output couples that form the learning data of the approximator. In this paper, we will use a neural network approximator: the radial basis function network (or RBF network). Many techniques have been developed for the learning phase of RBF; we use the technique described in [5]. We will show that the results obtained with these RBF can be improved by a pre-processing technique. This preprocessing is based on linear models. It does not increase the complexity of the RBF learning phase but improves the accuracy of the approximator. These techniques are applied to pricing derivative securities. Hutchinson, Andrew and Poggio [6] have treated this problem. They used simulated data and showed that RBF are adequate models to pricing derivative securities and also to hedging them. The results we obtained are comparable to Hutchinson's results but the learning scheme is simplified in our case. We will use this example to illustrate the advantages of our preprocessing technique for RBF.

BF are non-linear parametric approximation models based on combinations of Gaussian functions. In most cases, these Gaussian functions are radial (their output value depends only on the Euclidean distance between the input vector and a centre). As a consequence, input variables are not scaled in RBF, while a proper scaling could be more adequate. Our purpose is to eliminate this limitation, without penalising the simplicity of the RBF learning phase. If we build a linear model between the inputs and the output, this output will be approximated by a weighted sum of the inputs. The weight associated to each input determines its importance on the approximation of the output. This gives a very simple technique to determine the importance of all the inputs on the output. Therefore we are going to scale the inputs by the corresponding weights. A new so-called "Weighted RBF" is built, giving adequate importance to each of the inputs.

We test our weighted RBF on the example of pricing derivative securities. This example has been used by par Hutchinson, Lo and Poggio, we apply the same method to generate the data. In this paper, the authors use the Black-Scholes formula to generate the data and to simulate the price of derivative

Approximation par réseaux à fonctions radiales de base – Application à la détermination du prix d'achat d'une option.
ACSEG 2001

securities (named C). The purpose of the RBF model is to give an approximation \hat{C} of C . Three measures of performance are used. The first one is the determination coefficient R^2 between C and \hat{C} . The two other measures are the tracking and prediction errors. To measure the quality of the results obtained by the traditional RBF and the weighted RBF, we simulated a six-month price sample. In both cases, the number of Gaussian functions is chosen equal to 6. Then, 500 different six-months test sets are generated; the three performance measures are evaluated on both RBF. The results obtained for R^2 are presented in the next Figure. The X-coordinate is a design coefficient k (used in the RBF approximation scheme) and the Y-coordinate is the value of R^2 . The dotted line shows the results obtained with the classical RBF and the solid line shows the results of the weighted RBF. The improvement obtained thanks to weighting is undeniable.

In this paper, we used a traditional method to parameterise a RBF. We then suggested an improvement, consisting in weighting the inputs by the coefficients obtained by a linear model. This approximation scheme is tested to pricing derivative securities. The results obtained show an undeniable advantage for the weighted RBF. Moreover, the results are comparable to the best RBF and multi-layer perceptron built in the Hutchinson's paper. The advantage of the weighted RBF is the simplicity of the learning phase, while keeping the quality of the approximation.

1. Introduction

L'approximation de fonction est une des utilisations les plus courantes des réseaux de neurones artificiels. Le cadre général du problème d'approximation est le suivant. On suppose l'existence d'une relation entre plusieurs variables (les entrées) et une variable de sortie. Cette relation étant inconnue, on essaie de construire un approximateur « boîte noire » entre ces entrées et cette sortie. La structure de cet approximateur doit être choisie et l'approximateur calibré pour représenter au mieux la dépendance entrées-sortie. Pour réaliser ces différentes étapes, on dispose d'un ensemble de couples entrées-sortie qui forment les données d'apprentissage de l'approximateur.

Le type d'approximateur le plus courant est l'approximateur linéaire. Celui-ci a l'avantage d'être simple et peu coûteux en calculs, mais il ne convient évidemment pas si la vraie relation entre les entrées et la sortie est non linéaire. On se tourne alors vers les approximateurs non linéaires comme les réseaux de neurones artificiels.

Les réseaux de neurones artificiels les plus populaires sont les perceptrons multicouches qui ont été développés par Werbos [1] et Rumelhart [2]. Dans cet article, nous utiliserons un autre type de réseaux de neurones : les réseaux à fonctions radiales de base (ou réseaux RBF) [3]. Ces réseaux ont l'avantage d'être beaucoup plus simples que les perceptrons tout en gardant la fameuse propriété d'approximation universelle de fonctions [4]. De nombreuses techniques ont été développées pour l'apprentissage des RBF. La technique que nous avons choisie a été développée par Verleysen et Hlavačková [5]. Cette technique est sans doute une des plus simples mais elle donne de très bons résultats. Les RBF ainsi que la technique d'apprentissage choisie seront présentées au paragraphe 2.

Nous allons montrer que les résultats obtenus à l'aide des RBF peuvent être améliorés par une technique de prétraitement des entrées. Cette technique de prétraitement est basée sur des modèles linéaires. Elle ne complique pas l'apprentissage des RBF mais permet d'obtenir des résultats intéressants. Cette technique de prétraitement sera présentée au paragraphe 3.

Ces différentes techniques seront appliquées à la détermination du prix d'achat d'options. Ce problème a été traité avec succès par exemple par Hutchinson, Andrew et Poggio en 1994 [6]. Ceux-ci ont utilisé des données simulées et ont montré que les RBF permettaient de déterminer le prix d'achat d'options mais également d'effectuer la couverture de ces options. Les résultats que nous obtenons sont comparables aux résultats de Hutchinson et al. mais avec un processus d'apprentissage simplifié. Nous montrerons sur cet

exemple les avantages de notre technique de prétraitement des données. Cet exemple sera traité en détails au paragraphe 4.

2. Approximation par RBF

Nous disposons d'un ensemble d'entrées x_t et un ensemble de sorties y_t . L'approximation de y_t par un RBF sera notée \hat{y}_t . Cette approximation sera la somme pondérée de m fonctions gaussiennes Φ :

$$\hat{y}_t = \sum_{i=1}^m \lambda_i \Phi(x_t, C_i, \sigma_i) , \quad (1)$$

$$\text{avec } \Phi(x_t, C_i, \sigma_i) = e^{-\left(\frac{\|x_t - C_i\|}{\sqrt{2}\sigma_i}\right)^2} . \quad (2)$$

Le RBF est schématisé à la figure 1.

La complexité du RBF est déterminée par le nombre de noyaux Gaussiens. Les différents paramètres à déterminer sont la position des noyaux Gaussiens (C_i), leurs variances (σ_i) et les facteurs multiplicatifs (λ_i). La technique qui permet de les déterminer est développée en détails dans [5]. Nous allons l'expliquer brièvement.

Nous allons choisir la position des noyaux gaussiens en fonction de la distribution de x_t dans l'espace. Aux endroits où il y a peu d'entrées x_t nous mettrons peu de noyaux et inversement, là où il y a beaucoup de points, nous mettrons beaucoup de noyaux.

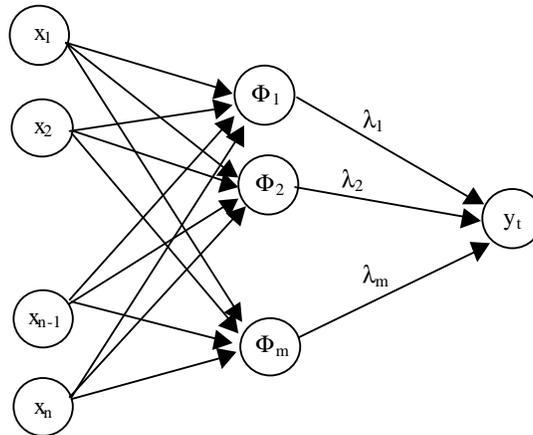


Figure 1 : Représentation d'un RBF.

La technique qui permet de réaliser cette opération porte le nom de quantification vectorielle et les points qui résument l'information de départ portent le nom de centroïdes. La quantification vectorielle se compose de deux étapes. On initialise d'abord les centroïdes aléatoirement dans l'espace. Ensuite on va les déplacer de la manière suivante. Tous les points x_t sont passés en revue et pour chacun de ceux-ci le centroïde le plus proche sera déplacé dans la direction de x_t selon la formule suivante :

$$C_i = C_i + \alpha(x_t - C_i) , \quad (3)$$

Approximation par réseaux à fonctions radiales de base – Application à la détermination du prix d'achat d'une option.
ACSEG 2001

avec x_i le point considéré, C_i le centroïde le plus proche de x_i et α un paramètre qui décroît au cours du temps. Des détails supplémentaires sur les méthodes de quantification vectorielle peuvent être trouvés dans [7,8].

Le second paramètre à choisir est la largeur des différents noyaux gaussiens (σ_i). Nous avons choisi de travailler avec des largeurs différentes pour chaque noyau. A cette fin, nous définissons la zone de Voronoï d'un centroïde comme la région de l'espace qui est plus proche de ce centroïde que de n'importe quel autre centroïde. Dans chacune de ces zones de Voronoï, on calcule la variance des points de cette zone. La largeur d'une gaussienne donnée sera le produit de la variance dans la zone de Voronoï où se situe le noyau, multipliée par un facteur k . Nous montrerons sur notre exemple comment choisir ce paramètre. Cette méthode a plusieurs avantages, le plus important de ces avantages étant que les différentes gaussiennes recouvrent largement l'espace des entrées du RBF.

Les derniers paramètres à déterminer sont les facteurs multiplicatifs λ_i . Mais si tous les autres paramètres sont fixés, ceux-ci sont déterminés par la résolution d'un simple système d'équations linéaires.

Le nombre total de paramètre est égal à $m*(n+1)+1$ avec n la dimension de l'espace des entrées et m le nombre de gaussiennes utilisées dans le RBF.

3. RBF avec entrées pondérées

Une des lacunes des RBF que nous avons présentés est qu'ils donnent une importance égale à toutes les variables d'entrée. Cela n'est pas le cas d'autres approximateurs de fonctions comme les perceptrons multicouches. Nous allons tenter d'éliminer cette lacune tout en ne pénalisant pas le processus de détermination des paramètres du RBF.

Supposons d'abord que toutes les entrées sont normalisées. Nous entendons par-là qu'elles ont toutes une moyenne nulle et une variance unitaire. Si nous construisons un modèle linéaire entre nos entrées et la sortie, la sortie sera approximée par une somme pondérée des différentes entrées. La pondération associée à chaque entrée détermine l'importance que celle-ci a sur l'approximation de la sortie. En effet, si l'on dérive le modèle linéaire par rapport aux différentes entrées, ce sont ces pondérations que l'on retrouve. Ceci est illustré dans l'exemple suivant :

$$y \cong \hat{y} = 2x_1 + x_2, \quad (4)$$

et donc nous avons :

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \cong \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} = 2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} \cong \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} = 1. \quad (6)$$

Nous disposons donc d'un moyen très simple pour déterminer l'importance relative des différentes entrées sur la sortie.

Nous allons ensuite multiplier les différentes entrées normalisées par ces facteurs de pondération. Ces nouvelles entrées seront utilisées dans un RBF tel que nous l'avons présenté dans la section précédente. Ce nouvel RBF que nous qualifierons de « pondéré », donnera donc une importance différente aux différentes variables d'entrées.

4. Détermination du prix d'achat d'une option

4.1 Génération des données

Nous allons tester notre RBF avec entrées pondérées sur un exemple de détermination du prix d'achat d'une option. Cet exemple a été traité par Hutchinson, Lo et Poggio en 1994 [4], nous utiliserons la même méthode de génération des données.

Dans cet article les auteurs utilisent pour générer leurs données la formule de Black-Scholes [9] pour simuler le prix d'achat d'une option. Cette formule est la suivante :

$$C(t) = S(t)\Phi(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad (7)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (8)$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (9)$$

Dans les formules ci-dessus, $C(t)$ est le prix d'achat d'une option, $S(t)$ le prix de l'action, X le prix de l'exercice, r le taux d'intérêt sans risque, $T-t$ le temps jusqu'à maturité, σ la volatilité et Φ est la fonction de distribution normale standardisée. Si r et s sont fixes, ce qui est le cas dans nos simulations, le prix de l'achat d'une option sera uniquement fonction de $S(t)$, X et $T-t$. Le type d'approximation qui est choisi est le suivant :

$$\hat{C}(t) = f\left(\frac{S(t)}{X}, T-t\right). \quad (10)$$

De façon traditionnelle, pour notre simulation, le prix de l'action pendant une période de deux ans sera généré par la formule suivante :

$$S(t) = S(0)e^{\sum_{i=1}^t Z_i}, \quad (11)$$

en prenant le nombre ouvrés de jours par année égal à 253 et Z_t une variable aléatoire extraite d'une distribution normale de moyenne $\mu = 0.10/253$ et de variance $\sigma^2 = 0.04/253$. La valeur $S(0)$ est égale à 50 US\$.

Le prix e l'exercice X et le temps jusqu'à maturité $T-t$ sont déterminés par les règles du « Chicago Board Options Exchange » (CBOE) [10]. En résumé, les règles sont les suivantes :

- le prix de l'exercice est un multiple de 5\$ pour des prix d'action entre 25 et 200\$;
- les deux prix d'exercice les plus proches des prix d'actions sont utilisés à chaque expiration d'options ;
- un troisième prix d'exercice est utilisé lorsque le prix d'action est trop proche du prix d'exercice (moins d'un dollar) ;

Approximation par réseaux à fonctions radiales de base – Application à la détermination du prix d'achat d'une option.
ACSEG 2001

- 4 dates d'expirations sont utilisées : la fin du mois courant, la fin du mois suivant et les fins des 2 trimestres suivants.

Une trajectoire typique obtenue grâce à ces règles est représentée à la figure 2.

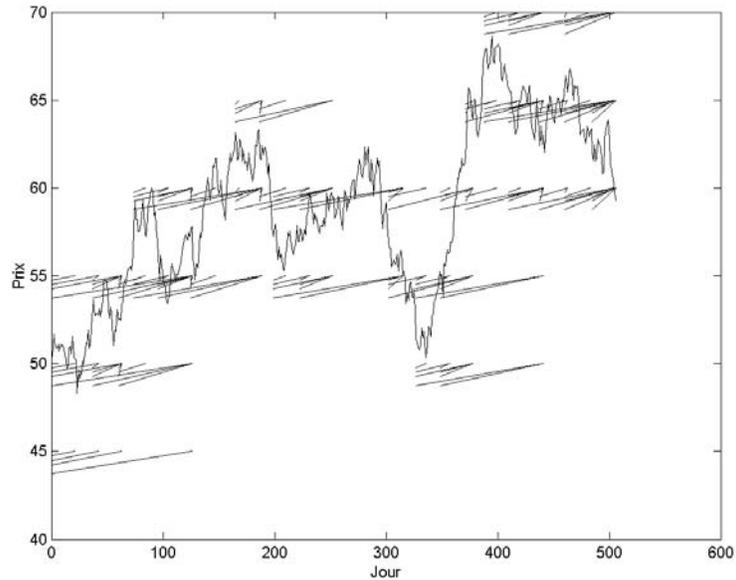


Figure 2 : Le trait continu représente le prix de l'action. Les traits en oblique représentent les différents prix d'exercices. Ceux-ci sont représentés en oblique pour rendre les différentes dates d'introduction et d'expiration visibles.

Les prix d'option d'achat obtenus en utilisant ces trajectoires sont représentés à la figure 3.

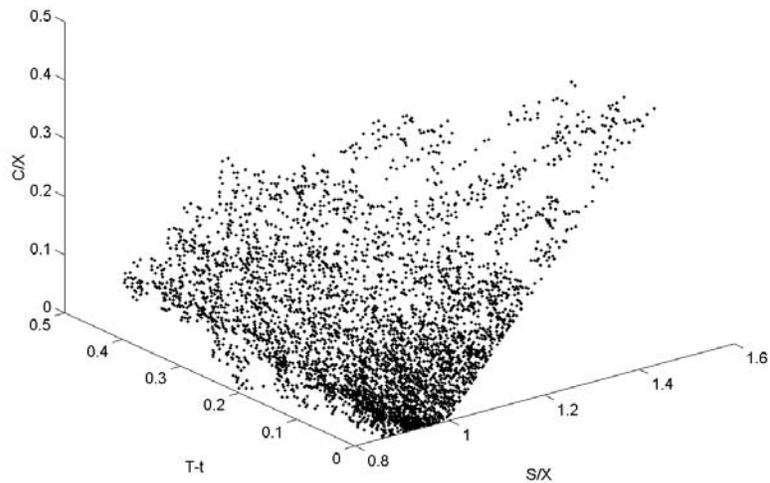


Figure 3 : prix d'option d'achat obtenus en utilisant les trajectoires simulées et la formule de Black-Scholes.

4.2 Mesure des performances

Trois mesures de performances vont être utilisées. La première mesure est le coefficient de détermination R^2 entre C et \hat{C} . Les deux autres mesures de performance sont les erreurs de "tracking" ξ et de prédiction η . Ces erreurs sont définies comme suit :

$$\xi = e^{rT} E[V(T)], \quad (12)$$

$$\eta = e^{rT} \sqrt{E^2[V(T)] + \text{Var}[V(T)]}, \quad (13)$$

$$\text{avec } V(t) = V_S(t) + V_B(t) + V_C(t). \quad (14)$$

$V(t)$ est la valeur du portefeuille au temps t , V_S la valeur de l'action, V_B la valeur des obligations et V_C la valeur de l'option. Les valeurs initiales de ces termes peuvent être calculées de la manière suivante :

$$V_S(0) = S(0) \Delta_{\text{RBF}}(0), \quad (15)$$

$$\Delta_{\text{RBF}}(0) = \frac{\partial F_{\text{RBF}}(0)}{\partial S}, \quad (16)$$

$$V_C(0) = -F_{\text{BS}}(0), \quad (17)$$

$$V_B(0) = -(V_S(0) + V_C(0)), \quad (18)$$

avec F_{BS} le prix de l'option par la formule de Black-Scholes et F_{RBF} son approximation par un RBF. On peut ensuite calculer les autres termes :

$$V_S(t) = S(t) \Delta_{\text{RBF}}(t), \quad (17)$$

$$\Delta_{\text{RBF}}(t) = \frac{\partial F_{\text{RBF}}(t)}{\partial S}, \quad (18)$$

$$V_B(t) = e^t V_B(t-1) - S(t)(\Delta_{\text{RBF}}(t) - \Delta_{\text{RBF}}(t-1)). \quad (19)$$

4.3 Résultats

Pour mesurer la qualité des résultats obtenues par les RBF classiques et pondérés, nous avons simulé un échantillon de prix d'une durée de 6 mois (en utilisant les formules (7) et (11)). Deux RBF sont calibrés sur ces données : un RBF classique et un RBF pondéré. Le nombre de gaussiennes utilisé est de 6. Cela correspond en effet à 19 paramètres par RBF, ce qui est plus ou moins équivalent au RBF à 20 paramètres qui est utilisé dans [6].

Ensuite, 500 ensembles de test sont générés (en utilisant les mêmes formules) et l'on mesure R^2 pour chacun des deux RBF. On mesure également ξ et η obtenus pour les deux RBF ainsi que pour la formule exacte de Black-Scholes.

Approximation par réseaux à fonctions radiales de base – Application à la détermination du prix d'achat d'une option.
ACSEG 2001

Les résultats obtenus pour R^2 sont présentés à la Figure 4. On y trouve en abscisse le coefficient k utilisé pour calculer la largeur des noyaux et en ordonné la valeur du R^2 (moyennée sur les 500 ensembles de test). Les résultats du RBF classique sont en pointillés alors que ceux du RBF pondéré sont en trait plein. La valeur de k à utiliser est choisie comme la plus petite valeur donnant un résultat (en termes de R^2) proche de l'asymptote, c'est à dire une valeur située dans le coude des courbes de la figure 4. Une valeur de $k = 4$ a été choisie.

Le gain obtenu grâce à la pondération est incontestable. Le R^2 obtenu dépasse les 99% ce qui est tout à fait équivalent aux résultats de [6] mais en utilisant des RBF beaucoup plus simples.

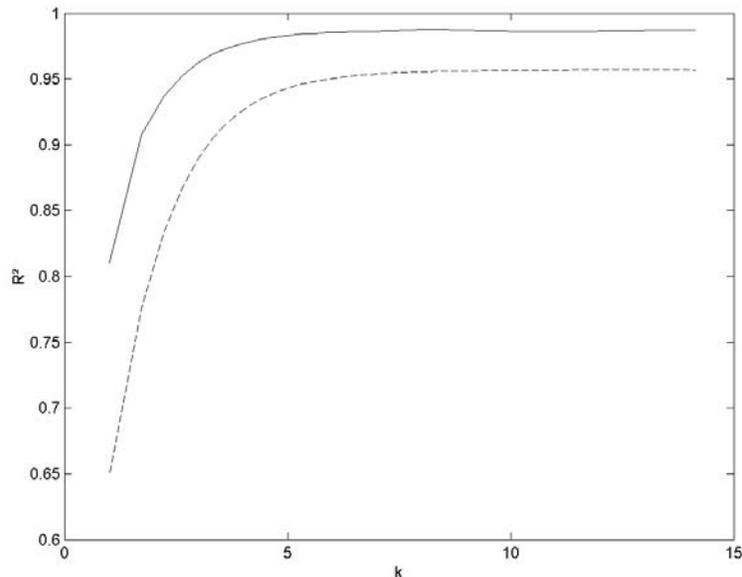


Figure 4 : Valeur du R^2 en fonction du coefficient k du RBF: en pointillé les résultats du RBF classique et en trait plein ceux du RBF pondéré.

Les résultats obtenus pour ξ et η sont également à l'avantage du RBF pondéré. En moyenne, pour le RBF classique nous avons $\xi = 1.80$ et $\eta = 2.03$. Pour le RBF normalisé, nous avons $\xi = 1.24$ et $\eta = 1.50$. En ce qui concerne les mesures de performance pour la formule exacte de Black-Scholes, nous avons $\xi = 0.57$ et $\eta = 0.85$.

5. Conclusions

Dans ce papier, nous avons montré une méthode simple pour paramétrer un RBF. Nous avons ensuite proposé une amélioration de ce RBF classique. Elle consiste en la pondération des entrées par les coefficients obtenus à travers un modèle linéaire. Ces différentes méthodes ont été ensuite testées pour la détermination du prix d'achat d'une option. Les résultats que nous avons obtenus ont montré un net avantage pour le RBF pondéré quelle que soit la mesure de performance utilisée. De plus, les résultats sont comparables aux meilleurs RBF ou perceptrons multicouches que l'on peut trouver dans la littérature. Les avantages de ce RBF pondéré sont donc simplicité de paramétrage et qualité de l'approximation.

Approximation par réseaux à fonctions radiales de base – Application à la détermination du prix d'achat d'une option.
ACSEG 2001

Remerciements

Michel Verleysen est chercheur qualifié du Fonds National de la Recherche Scientifique belge (FNRS). Le travail de John Lee a été réalisé avec le support du Ministère de la Région wallonne, dans le cadre du Programme de Formation et d'Impulsion à la Recherche Scientifique et Technologique. Une partie des résultats présentés dans ce papier a été financée par le Pole d'Attraction Inter-Universitaire (PAI), initié par l'état belge, ministère des sciences, des technologies et de la culture. La responsabilité scientifique est laissée aux auteurs.

Références

- [1] Werbos P., "*Beyond regression: new tools for prediction and analysis in the behavioral sciences*", PhD thesis, Harvard University, 1974.
- [2] Rumelhart D., Hinton G., Williams R., "*Learning representation by back-propagating errors*", Nature 323, pp. 533-536, 1986.
- [3] Powell M., "*Radial basis functions for multivariable interpolation : A review*", J.C. Mason and M.G. Cox, eds, Algorithms for Approximation, pp.143-167, 1987.
- [4] Poggio T. et Girosi F., "*Networks for approximation and learning*", Proceedings of IEEE 78, pp. 1481-1497, 1987.
- [5] Verleysen M. et Hlavačková K.: "*An Optimised RBF Network for Approximation of Functions*". In: Proc of European Symposium on Artificial Neural Networks, Brussels (Belgium), April 1994.
- [6] Hutchinson J., Lo A. et Poggio T., "*A Nonparametric Approach to Pricing and Hedging Securities Via Learning Networks*", The Journal of Finance, Vol XLIX, N°3, July 1994.
- [7] Kohonen T., "*Self-organising Maps*", Springer Series in Information Sciences, Vol. 30, Springer, Berlin, 1995.
- [8] Gray R., "*Vector Quantization*", IEEE Mag., Vol. 1, pp. 4-29, April 1984.
- [9] Black F. et Sholes N., "*The pricing of options and corporate liabilities*", Journal of Political Economy, pp. 637-659, 1981.
- [10] Hull J., "*Options, Futures, and Other Derivative Securities*", 2nd Ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.